Aus der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München

Simultane diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät der Bayerischen Ludwig-Maximilians-Universität zu München

eingereicht am 12. April 1939

von

Hasan Aral
aus Konya (Türkei)

München 1939
Universitäts-Buchdruckerei Dr. C. Wolf & Sohn

Aus der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München

Simultane diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät der Bayerischen Ludwig-Maximilians-Universität zu München

eingereicht am 12. April 1939

von

Hasan Aral
aus Konya (Türkei)

München 1939
Universitäts-Buchdruckerei Dr. C. Wolf & Sohn

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

Berichterstatter:
Geheimrat Prof. Dr. *Perron*

Tag der mündlichen Prüfung:
17. Juli 1939

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis

Seite

§ 1. Einleitung 5

§ 2. Allgemeine Abschätzung von γ_0 nach oben 7

§ 3. Hilfssatz zu Satz 2 12

§ 4. Allgemeine Abschätzung von γ_0 nach unten 16

§ 5. Die Abschätzung der minimalen Grundzahl Δ_0 nach oben für relativ quadratische Körper 20

§ 6. Die Abschätzung der minimalen Grundzahl Δ_0 nach oben für relativ kubische Körper 29

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548309_0208

§ 1.

Einleitung.

Es sei $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ irgend ein imaginärer quadratischer Körper (D quadratfreie ganze Zahl); dann kann man mit Hilfe der Minkowskischen Methode beweisen, daß es eine Zahl δ gibt, derart, daß man für jede komplexe Zahl α die Umgleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\delta}{|q|^2}$$

durch unendlich viele Paare ganzer Zahlen p, q aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ befriedigen kann. Jede Zahl größer als δ leistet dasselbe. Die Menge dieser Zahlen δ hat eine untere Grenze δ_0. Dann hat δ_0 folgende Eigenschaften:

Für $\varepsilon > 0$ und beliebiges α ist

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\delta_0 + \varepsilon}{|q|^2}$$

durch unendlich viele Paare von ganzen Zahlen p, q aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ erfüllbar.

Für gewisse α ist

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\delta_0 - \varepsilon}{|q|^2}$$

nicht durch unendlich viele Paare p, q aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ erfüllbar.

Es handelt sich um die Berechnung oder wenigstens Abschätzung von δ_0.

Verschiedene Untersuchungen über die Abschätzung von δ_0 liegen

von *Minkowski,*[1]) *Ford,*[2]) *Perron,*[3])[4])[5]) *Hofreiter*[6])[7]) und von *Oppenheim*[8]) vor.

Wir beschäftigen uns hier mit der analogen Fragestellung bei der Simultanapproximation von mehreren komplexen Zahlen.

Man kann beweisen, es gibt eine Zahl γ derart, daß man für mehrere komplexe Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ die Ungleichungen

$$\left| \alpha_\nu - \frac{x_\nu}{x_n} \right| < \frac{\gamma}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

durch unendlich viele Systeme von ganzen Zahlen x_ν, x_n aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ befriedigen kann. Jede Zahl größer als γ leistet dasselbe. Die Menge dieser Zahlen γ hat eine untere Grenze, die wir mit γ_0 bezeichnen wollen. Dann hat γ_0 wie bei der Approximation einer komplexen Zahl folgende Eigenschaften:

Für $\varepsilon > 0$ und beliebige α_ν sind die Ungleichungen

$$\left| \alpha_\nu - \frac{x_\nu}{x_n} \right| < \frac{\gamma_0 + \varepsilon}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

durch unendlich viele Systeme von ganzen Zahlen x_ν, x_n aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ erfüllbar.

Für gewisse α_ν sind die Ungleichungen

$$\left| \alpha_\nu - \frac{x_\nu}{x_n} \right| < \frac{\gamma_0 - \varepsilon}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

---

[1]) *H. Minkowski:* „Geometrie der Zahlen". § 39 (1910).

[2]) *L. R. Ford:* „On the closeness of approach of complex rat. fractions to a complex irrat. number". Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925).

[3]) *O. Perron:* „Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $\mathfrak{R}(i)$". Math. Ann. 103 und 105 (1930, 1931).

[4]) *O. Perron:* „Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzel". Sitz.-Ber. d. bayer. Ak. d. Wiss., Jahrg. 1931.

[5]) *O. Perron:* „Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$". Math. Zeitschr. 37 (1933).

[6]) *N. Hofreiter:* „Über die Approximation von komplexen Zahlen". Monatsh. f. Math. u. Phys. 42 (1935).

[7]) *N. Hofreiter:* „Diophantische Approximationen in imag. quad. Zahlkörpern". Monatsh. f. Math. u. Phys. 45 (1936).

[8]) *A. Oppenheim:* „Diophantische Approximation in imag. quad. Zahlkörpern". Monatsh. f. Math. u. Phys. 46 (1937).

nicht durch unendlich viele Systeme von ganzen Zahlen x_ν, x_n aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ erfüllbar. Wir wollen γ_0 im Satz 1 nach oben und im Satz 2 nach unten abschätzen.

§ 2.

Allgemeine Abschätzung von γ_0 nach oben.

Satz 1. Sei n eine ganze Zahl $\geqq 2$. Hat dann γ die Bedeutung

$$\gamma = \begin{cases} 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{D}}{\pi}} \cdot \left(\frac{2n-1}{n} \cdot \frac{4\sqrt{D}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}, & \text{wenn } D \not\equiv 3 \pmod 4, \\ \frac{n-1}{n} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{D}}{\pi}} \cdot \left(\frac{2n-1}{n} \cdot \frac{2\sqrt{D}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}, & \text{wenn } D \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ beliebige komplexe Zahlen, die nicht alle in $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ liegen,[9]) so sind die Ungleichungen

$$\left|\alpha_\nu - \frac{x_\nu}{x_n}\right| < \frac{\gamma}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

durch unendlich viele Systeme ganzer Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ erfüllbar. Es ist also $\gamma_0 \leqq \gamma$.

Speziell für $D = 1$ kommt der *Minkowski*sche[10]) Wert heraus.

Für beliebiges D und $n = 2$ ist der Satz bereits von *Hofreiter*[11]) bewiesen.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $D \not\equiv 3 \pmod 4$.

Im $2n$-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $y_1, y'_1, \ldots, y_n, y'_n$ wird durch die $n-1$ Ungleichungen

$$(1) \qquad t\,|\alpha_\nu x_n - x_\nu| + \frac{|x_n|}{t^{n-1}} \leqq c \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

---

[9]) Liegen alle α_ν in $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, so gilt der Satz auch, er ist aber trivial.

[10]) Siehe Anm. 1.

[11]) Siehe Anm. 7, § 2, S. 179.

in denen die x_ν, α_ν die Bedeutung

$$x_\nu = y_\nu + i\sqrt{D}\,y'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

$$\alpha_\nu = \beta_\nu + i\beta'_\nu \qquad (\beta_\nu, \beta'_\nu \text{ reell}, \ \nu = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{3}$$

haben, ein konvexer Körper mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt charakterisiert. Dabei bedeutet t einen positiven Parameter, c ebenfalls eine positive Zahl. Wenn das Volumen dieses Körpers gleich 2^{2n} ist, dann enthält er nach einem klassischen Satz von *Minkowski* außer dem Nullpunkt mindestens noch einen weiteren Punkt mit ganzen rationalen Koordinaten y_ν, y'_ν. Da im Fall $D \equiv\!\!\equiv 3 \pmod 4$ die ganzen Zahlen aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ gerade die Zahlen der Form (2) mit ganzen rationalen y_ν, y'_ν sind, so besagt das, daß die Ungleichungen (1) durch ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, die nicht alle verschwinden, erfüllbar sind.

Hiernach müssen wir zuerst das Volumen des Körpers (1) berechnen. Zu dem Zweck setzen wir in (1) für x_ν, x_n, α_ν ihre Werte aus (2) und (3) ein und bekommen

$$t \cdot \sqrt{(\beta_\nu y_n - \beta'_\nu \sqrt{D}\,y'_n - y_\nu)^2 + (\beta'_\nu y_n + \beta_\nu \sqrt{D}\,y'_n - \sqrt{D}\,y'_\nu)^2} + \frac{\sqrt{y_n^2 + D\,y'^2_n}}{t^{n-1}} \leqq c. \tag{4}$$

Durch die affine Transformation

$$\left.\begin{aligned} \xi_\nu &= t(\beta_\nu y_n - \beta'_\nu \sqrt{D}\,y'_n - y_\nu), \\ \xi'_\nu &= t(\beta'_\nu y_n + \beta_\nu \sqrt{D}\,y'_n - \sqrt{D}\,y'_\nu), \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\xi_n = \frac{1}{t^{n-1}} \cdot y_n$$

$$\xi'_n = \frac{\sqrt{D}}{t^{n-1}} \cdot y'_n$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\frac{d(\xi_1, \xi'_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi'_{n-1}, \xi_n, \xi'_n)}{d(y_1, y'_1, \ldots, y_{n-1}, y'_{n-1}, y_n, y'_n)} = D^{\frac{n}{2}} \tag{5}$$

geht der Körper (4) oder der ursprüngliche Körper (1) in den Körper

$$\sqrt{\xi_\nu^2+\xi_\nu'^2}+\sqrt{\xi_n^2+\xi_n'^2}\leqq c \qquad (\nu=1,2,\ldots,n-1) \tag{6}$$

über. Um das Volumen des Körpers (6) auszurechnen, führen wir Polar-Koordinaten ein

$$\left.\begin{aligned}\xi_\nu &= r_\nu\cos\alpha_\nu\\ \xi'_\nu &= r_\nu\sin\alpha_\nu\end{aligned}\right\}\ (\nu=1,2,\ldots,n);$$

dann geht der Körper (6) in

$$r_\nu+r_n\leqq c \qquad (\text{alle } r \text{ pos.},\ \nu=1,2,\ldots,n-1)$$

über. Wir bekommen das Volumen im ξ-Raum

$$\begin{aligned}V_\xi &= \underbrace{\int\ldots\int}_{2n} d\xi_1\ldots d\xi_n\, d\xi'_1\ldots d\xi'_n\\ &= \underbrace{\int\ldots\int}_{2n} r_1\ldots r_n\, dr_1\ldots dr_n\, d\alpha_1\ldots d\alpha_n\\ &= (2\pi)^n\int_0^c\left[\int_0^{c-r_n} r_1\,dr_1\ldots\int_0^{c-r_n} r_{n-1}\,dr_{n-1}\right] r_n\,dr_n\\ &= (2\pi)^n\int_0^c\left[\frac{(c-r_n)^2}{2}\right]^{n-1} r_n\,dr_n.\end{aligned}$$

Durch die Substitution $r_n = c\tau$ folgt hieraus:

$$\begin{aligned}V_\xi &= 2\pi^n c^{2n}\int_0^1(1-\tau)^{2n-2}\tau\,d\tau\\ &= 2\pi^n c^{2n}\frac{\Gamma(2n-1)\,\Gamma(2)}{\Gamma(2n+1)}\\ &= \frac{\pi^n\cdot c^{2n}}{n(2n-1)}.\end{aligned}$$

Wegen (5) ist aber

$$V_y = V_\xi\cdot\left(\frac{1}{D}\right)^{\frac{n}{2}},$$

also

$$V_y = \frac{\pi^n c^{2n}}{n(2n-1) D^{\frac{n}{2}}}.$$

Da $V_y = 2^{2n}$ sein sollte, folgt hieraus

$$\frac{\pi^n c^{2n}}{n(2n-1) D^{\frac{n}{2}}} = 2^{2n}, \tag{7}$$

daraus der gesuchte Wert für c:

$$c = \frac{2(2n-1)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} \cdot D^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}, \tag{8}$$

er ist unabhängig vom Parameter t.

Im folgenden soll unter c stets der Wert (8) verstanden werden. Aus (1) folgt

$$|\alpha_\nu x_n - x_\nu| \leqq \frac{c}{t} - \frac{|x_n|}{t^n}. \tag{9}$$

Wenn t_0 irgend ein fester Wert ist, dann gibt es ganze Zahlen x_ν, aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, so daß

$$|\alpha_\nu x_n - x_\nu| \leqq \frac{c}{t_0} - \frac{|x_n|}{t_0^n} \tag{9a}$$

ist. Für diese x_ν ist auch

$$|\alpha_\nu x_n - x_\nu| \leqq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{c}{\sqrt[n-1]{\frac{n|x_n|}{c}}}. \tag{10}$$

Um das einzusehen, betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{c}{t} - \frac{|x_n|}{t^n}$$

und berechnen ihr Maximum für positive t. Nach geläufiger Methode ergibt sich

$$\left(\frac{c}{t} - \frac{|x_n|}{t^n}\right)_{\text{Max.}} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{c}{\sqrt[n-1]{\frac{n|x_n|}{c}}},$$

also ist gewiß

$$\frac{c}{t_0} - \frac{|x_n|}{t_0^n} \leqq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{c}{\sqrt[n-1]{\frac{n|x_n|}{c}}}.$$

Hieraus und aus (9a) folgt sogleich die obige Behauptung (10).

Für ein genügend großes t_0 ist die rechte Seite von (9a) beliebig klein, nämlich $< \frac{c}{t_0}$, infolgedessen muß die linke Seite auch beliebig klein sein. x_n kann nicht Null sein. Denn wenn $x_n = 0$ wäre, so müßte ein anderes x_ν von Null verschieden und gleichzeitig, weil x_ν eine ganze Zahl aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ ist, $|x_\nu| \geqq 1$ sein. Dann würde aus (9a) folgen

$$1 \leqq |x_\nu| = |\alpha_\nu x_n - x_\nu| \leqq \frac{c}{t_0},$$

was aber für großes t_0 falsch ist.

Wir wollen noch zeigen, daß $|x_n|$ sogar beliebig groß ist, wenn nur t_0 groß genug ist. Da nämlich mindestens ein α_ν, etwa α_1, nicht dem Körper $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ angehört, so ist $\alpha_1 x_n - x_1$ stets von Null verschieden. Für eine endliche Menge von x_n-Werten und zugehörige x_ν hat $|\alpha_1 x_n - x_1|$ ein positives Minimum δ. Wählt man dann t_0 so groß, daß $\frac{c}{t_0} < \delta$ ist, dann wird erst recht für die zugehörigen x_1, x_n

$$|\alpha_1 x_n - x_1| \leqq \frac{c}{t_0} - \frac{|x_n|}{t_0^n} < \frac{c}{t_0} < \delta.$$

Also gehört dieses x_n nicht zu der endlichen Menge von vorhin. Die Menge aller x_n, die zu den verschiedenen Werten von t_0 gehören, ist also unendlich, sodaß unter ihnen absolut beliebig große sind.

Setzen wir in (10) für c den Wert aus (8) ein, so ergibt sich nach leichter Umrechnung

$$|\alpha_\nu x_n - x_\nu| < 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{D}}{\pi}} \cdot \left(\frac{2n-1}{n} \cdot \frac{4\sqrt{D}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}$$

oder

$$\left|\alpha_\nu - \frac{x_\nu}{x_n}\right| < 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{D}}{\pi}} \cdot \left(\frac{2n-1}{n} \cdot \frac{4\sqrt{D}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Damit ist der Satz 1 für $D \equiv\!|\!\equiv \pmod 4$ bewiesen.

Wenn nun $D \equiv 3 \pmod 4$ ist, so lassen sich obige Überlegungen sehr leicht übertragen. An Stelle von (2) treten jetzt die Gleichungen

$$x_\nu = y_\nu + \frac{1 + i\sqrt{D}}{2} y'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

damit die ganzen Zahlen aus $\mathfrak{k} = \Re(i\sqrt{D})$ wieder den ganzen rationalen y_ν, y'_ν entsprechen. Durch affine Transformation gelangt man wieder zum Körper (6), wobei aber diesmal die Funktionaldeterminante gleich $\frac{1}{2^n} \cdot D^{\frac{n}{2}}$ ist. Daher erscheint in der Gleichung (7) die linke Seite noch mit 2^n multipliziert und für c ergibt sich der Wert

$$c = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot (2n-1)^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} \cdot D^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}$$

Das setzen wir in in (10) für c ein und erhalten:

$$\left| \alpha_\nu - \frac{x_\nu}{x_n} \right| < \frac{n-1}{n} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{D}}{\pi}} \cdot \left(\frac{2n-1}{n} \cdot \frac{2\sqrt{D}}{\pi} \right)^{\frac{1}{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Damit ist auch für den Fall $D \equiv 3 \pmod 4$ der Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Hilfssatz zu Satz 2.

Wir schicken zuerst einige Bemerkungen voraus, ehe wir den Hilfssatz formulieren, der den Beweis von Satz 2 erleichtern soll.

Es sei $\mathfrak{k}_1$ ein Relativkörper vom Relativgrad n über dem imaginären quadratischen Körper $\mathfrak{k} = \Re(i\sqrt{D})$. Die relativ-konjugierten Körper zu $\mathfrak{k}_1$ sollen mit $\mathfrak{k}''_1, \ldots \mathfrak{k}_1^{(n)}$ und zu einer Zahl ω aus $\mathfrak{k}_1$, die relativ-konjugierten Zahlen mit $\omega'', \ldots, \omega^{(n)}$ bezeichnet werden.

Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ irgendwelche n ganze Zahlen aus $\mathfrak{k}_1$, so ist das Quadrat der Determinante

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots\ldots\ldots & \omega_n \\ \omega''_1 & \omega''_2 & \ldots\ldots\ldots & \omega''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \ldots\ldots\ldots & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

eine ganze Zahl aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, ihr absoluter Betrag läßt sich durch geeignete Wahl von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ von Null verschieden und möglichst klein machen. Dieses Minimum werde mit Δ bezeichnet.

Ein System von ganzen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, für welche das Determinantenquadrat den absoluten Wert Δ hat, möge ein Grundsystem und Δ die Grundzahl von $\mathfrak{k}_1$ heißen.

Nun sei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ein Grundsystem, und die adjungierte Determinante von (11) sei

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \ldots\ldots & \Omega_n \\ \Omega''_1 & \Omega''_2 & \ldots\ldots & \Omega''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \Omega_1^{(n)} & \Omega_2^{(n)} & \ldots\ldots & \Omega_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Dann sind alle Ω_ν^2 Zahlen aus $\mathfrak{k}_1$ und von Null verschieden. Wäre nämlich $\Omega_\nu^2 = 0$ für ein gewisses ν, so wären die konjugierten Zahlen $(\Omega_\nu^{(\mu)})^2$ $(\mu = 2, 3, \ldots, n)$ ebenfalls gleich Null; folglich $\Delta = 0$. Das widerspricht der Annahme des Δ.

Wir gehen jetzt von irgend einem Grundsystem $\omega_1, \ldots, \omega_n$ aus. Durch eine lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ und der Transformationsdeterminante 1 geht es offenbar wieder in ein Grundsystem über. Mittels solcher Transformationen beweisen wir jetzt den

Hilfssatz. Es gibt ein Grundsystem $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ derart, daß in der $(n-1)$-reihigen Determinante

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \tau''_1 & \tau''_2 & \ldots\ldots & \tau''_{n-1} \\ \tau'''_1 & \tau'''_2 & \ldots\ldots & \tau'''_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \tau_1^{(n)} & \tau_2^{(n)} & \ldots\ldots & \tau_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

die Elemente in der Hauptdiagonale im Verhältnis zu allen anderen Elementen dem absoluten Betrag nach beliebig groß sind.[12])

Den Beweis führen wir dadurch, daß wir von dem Grundsystem $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ zu einem neuen System $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ schrittweise übergehen, derart, daß in der Determinante (12) die Elemente der Haupt-

[12]) Der Hilfssatz hat nur für $n > 2$ Bedeutung. Für $n = 2$ ist er gegenstandslos.

diagonale absolut beliebig groß sind, während für die $\tau_\nu^{(\mu)}$ außerhalb der Hauptdiagonale

$$|\tau_\nu^{(\mu)} - \omega_\nu^{(\mu)}| < 1$$

ist.

Zu dem Grundsystem $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des Körpers $\mathfrak{k}_1$ wählen wir als erstes neues System $\tau_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$, wo nur

$$\tau_1 = \omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + \ldots + a_n\omega_n$$

(a_ν ganze Zahlen aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$) statt ω_1 einzusetzen ist. Da bei der Transformation die Transformationsdeterminante gleich 1 ist, so liegt wieder ein Grundsystem vor.

Wir suchen jetzt die ganzen Zahlen $a_2, \ldots, a_n$ aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ so zu wählen, daß in der ersten Spalte der Determinante

$$\begin{vmatrix} \tau''_1 & \omega''_2 & \omega''_3 & \ldots & \omega''_{n-1} \\ \tau'''_1 & \omega'''_2 & \omega'''_3 & \ldots & \omega'''_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \omega_3^{(n)} & \ldots & \omega_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

τ''_1 absolut beliebig groß ist, während für $\mu > 2$ stets $|\tau_1^{(\mu)} - \omega_1^{(\mu)}| < 1$ ist. Es gibt solche ganze Zahlen $a_2, \ldots, a_n$ aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, die das Gewünschte leisten. Um das einzusehen, betrachten wir die Ungleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} |\tau'''_1 - \omega'''_1| = |a_2\omega'''_2 + \ldots + a_n\omega'''_n| < 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |\tau_1^{(n)} - \omega_1^{(n)}| = |a_2\omega_2^{(n)} + \ldots + a_n\omega_n^{(n)}| < 1 \\ |\tau''_1 - \omega''_1| = |a_2\omega'' + \ldots + a_n\omega''_n| > G + M, \end{cases}$$

wo G eine beliebig große Zahl und $M = \text{Max.}|\omega_\nu^{(\mu)}|$ ist.

Wenn $D \equiv 3 \pmod 4$ ist, (dieselbe Überlegung gilt mit geringer Modifikation auch, wenn $D \equiv 3 \pmod 4$ ist), setzen wir

$$a_\nu = x_\nu + i\sqrt{D}\,x'_\nu \qquad (x_\nu, x'_\nu \text{ ganz rat.})$$

$$\omega_\nu^{(\mu)} = \alpha_\nu^{(\mu)} + i\beta_\nu^{(\mu)} \qquad (\alpha_\nu^{(\mu)}, \beta_\nu^{(\mu)} \text{ reell})$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots, n;\ \mu = 2, 3, \ldots, n).$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (13) bekommt man

$$\left.\begin{array}{l} \left|\sum_{\nu=2}^{n}\left[(\alpha'''_\nu x_\nu - \beta'''_\nu \sqrt{D}\, x'_\nu) + i\,(\beta'''_\nu x_\nu + \alpha'''_\nu \sqrt{D}\, x'_\nu)\right]\right| < 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left|\sum_{\nu=2}^{n}\left[(\alpha_\nu^{(n)} x_\nu - \beta_\nu^{(n)} \sqrt{D}\, x'_\nu) + i\,(\beta_\nu^{(n)} x_\nu + \alpha_\nu^{(n)} \sqrt{D}\, x'_\nu)\right]\right| < 1 \end{array}\right\} n-2$$

$$\left|\sum_{\nu=2}^{n}\left[(\alpha''_\nu x_\nu - \beta''_\nu \sqrt{D}\, x'_\nu) + i\,(\beta''_\nu x_\nu + \alpha''_\nu \sqrt{D}\, x'_\nu)\right]\right| > G + M.$$

Das wird gewiß erreicht, wenn wir folgendes machen können:

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left|\sum_{\nu=2}^{n}(\alpha'''_\nu x_\nu - \beta'''_\nu \sqrt{D}\, x'_\nu)\right| < \frac{1}{2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left|\sum_{\nu=2}^{n}(\alpha_\nu^{(n)} x_\nu - \beta_\nu^{(n)} \sqrt{D}\, x'_\nu)\right| < \frac{1}{2} \end{array}\right\} n-2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\sum_{\nu=2}^{n}(\beta'''_\nu x_\nu + \alpha'''_\nu \sqrt{D}\, x'_\nu)\right| < \frac{1}{2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left|\sum_{\nu=2}^{n}(\beta_\nu^{(n)} x_\nu + \alpha_\nu^{(n)} \sqrt{D}\, x'_\nu)\right| < \frac{1}{2} \end{array}\right\} n-2$$

$$\left|\sum_{\nu=2}^{n}(\alpha''_\nu x_\nu - \beta''_\nu \sqrt{D}\, x'_\nu)\right| < \frac{1}{2}$$

$$\left|\sum_{\nu=2}^{n}(\beta''_\nu x_\nu + \alpha''_\nu \sqrt{D}\, x'_\nu)\right| > G + M.$$

Dieses System, außer der letzten Ungleichung besteht aus $2n-3$ Ungleichungen mit $2n-2$ Unbekannten. Da die Zahl der Unbekannten größer ist als die Zahl der Ungleichungen, so existieren unendlich viele ganzzahlige Lösungen[13]) x_ν, x'_ν für das System (14) (ausgenommen die letzte Ungleichung).

Es gibt aber unter diesen unendlich vielen ganzzahligen Lösungen solche, die die letzte Ungleichung von (14) auch erfüllen. Weil nämlich die $(n-1)$-reihige Determinante des Systems (13) gleich $\Omega_1 \neq 0$ ist, so sieht man leicht, daß auch die $(2n-2)$-reihige Determinante des Systems (14) von Null verschieden ist. Wenn nun die linke Seite der letzten Ungleichung von (14) für alle unendlich vielen Lösungen

[13]) *O. Perron:* „Irrationalzahlen", nach dem Satz 59, S. 140 (1921).

unterhalb einer Schranke bleiben würde, so würde das besagen, daß ein gewisser beschränkter Körper des $(2n-2)$-dimensionalen Raumes unendlich viele Gitterpunkte enthält, was unmöglich ist.

Es ist jetzt $|\tau_1^{(\mu)} - \omega_1^{(\mu)}| < 1$ und $|\tau''_1| > G$, wie wir es wollten.

Von dem hiermit gewonnenen Grundsystem $\tau_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ gehen wir jetzt wieder zu einem neuen $\tau_1, \tau_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ über, wo nur

$$\tau_2 = \omega_2 + b_1\tau_1 + b_3\omega_3 + \ldots + b_n\omega_n$$

statt ω_2 einzusetzen ist (b_ν ganze Zahlen aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$). Da bei der Transformation die Transformationsdeterminante gleich 1 ist, so liegt wieder ein Grundsystem vor.

Wir suchen nunmehr für $b_1, b_3, b_4, \ldots, b_n$ solche ganze Zahlen aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, daß in der zweiten Spalte der Determinante

$$\begin{vmatrix} \tau''_1 & \tau''_2 & \omega''_3 & \ldots & \omega''_{n-1} \\ \tau'''_1 & \tau'''_2 & \omega'''_3 & \ldots & \omega'''_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_1^{(n)} & \tau_2^{(n)} & \omega_3^{(n)} & \ldots & \omega_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

τ'''_2 absolut beliebig groß ist, während für $\mu > 1$ und $\mu \neq 3$ stets $|\tau_2^{(\mu)} - \omega_2^{(\mu)}| < 1$ ist. Das führt auf ein System von Ungleichungen, die dem System (13) völlig analog sind und sich in gleicher Weise behandeln lassen.

Wir fahren so fort, indem wir dieselben Überlegungen wiederholen. Nach $n-1$ Schritten bekommen wir ein Grundsystem $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n (= \omega_n)$, welches die in dem Hilfssatz angegebenen Eigenschaften hat.

§ 4.

Allgemeine Abschätzung von γ_0 nach unten.

Es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ein Grundsystem von $\mathfrak{k}_1$ und zwar, falls $n > 2$, mit der in dem Hilfssatz angegebenen Eigenschaft. Setzt man also

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & \omega_n \\ \omega''_1 & \omega''_2 & \ldots & \omega''_{n-1} & \omega''_n \\ \omega'''_1 & \omega'''_2 & \ldots & \omega'''_{n-1} & \omega'''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \ldots & \omega_{n-1}^{(n)} & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix}^2 = \Delta_1$$

so ist $|\Delta_1| = \Delta$ (= Grundzahl), und in der abgeteilten $(n-1)$-reihigen Unterdeterminante sind die Elemente der Hauptdiagonale im Verhältnis zu allen anderen absolut beliebig groß.

Die adjungierte Determinante zu $\sqrt{\Delta_1}$ sei

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_n \\ \Omega''_1 & \Omega''_2 & \dots & \Omega''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_1^{(n)} & \Omega_2^{(n)} & \dots & \Omega_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Es sind alle Quotienten $\frac{\Omega_\nu}{\Omega_n}$ $(\nu = 1, 2, \dots, n-1)$ Zahlen aus $\mathfrak{k}_1$ und von Null verschieden. Außerdem sind sie Lösungen der $n-1$ linearen Gleichungen

$$(15) \qquad \begin{cases} \omega''_1 y_1 + \omega''_2 y_2 + \dots + \omega''_{n-1} y_{n-1} + \omega''_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_1^{(n)} y_1 + \omega_2^{(n)} y_2 + \dots + \omega_{n-1}^{(n)} y_{n-1} + \omega_n^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Wir formulieren nun den

Satz 2. Ist $\gamma' > 0$ eine Konstante, die kleiner als $\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}$ ist, so gibt es in $\mathfrak{k}_1$ Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ derart, daß die $n-1$ Ungleichungen

$$(16) \qquad \left|\alpha_\nu - \frac{x_\nu}{x_n}\right| < \frac{\gamma'}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n-1)$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ haben. Es ist also $\gamma_0 \geqq \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}$.

Beweis. Wir wollen die Zahlen $\alpha_\nu = \frac{\Omega_\nu}{\Omega_n}$ $(\nu = 1, 2, \dots, n-1)$ des Relativkörpers $\mathfrak{k}_1$ simultan approximieren durch Brüche $\frac{x_\nu}{x_n}$, wobei x_ν, x_n ganze Zahlen des Grundkörpers $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ sind.

Die folgende Überlegung ist ähnlich wie bei *Furtwängler*[14]) und *Hofreiter*.[15])

Es sei

$$\left|\frac{x_\nu}{x_n}-\frac{\Omega_\nu}{\Omega_n}\right|<\frac{\gamma'}{|x_n|^{1+\frac{1}{n-1}}} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n-1). \tag{17}$$

Definiert man ε_ν, ε'_ν durch

$$\frac{x_\nu}{x_n}=\frac{\Omega_\nu}{\Omega_n}+\frac{\gamma'\cdot\varepsilon_\nu}{|x_n|^{1+\frac{1}{n-1}}}$$

oder

$$x_\nu=\frac{\Omega_\nu}{\Omega_n}x_n+\frac{\gamma'\cdot\varepsilon'_\nu}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}, \tag{18}$$

so ist $|\varepsilon_\nu|=|\varepsilon'_\nu|<1$. Wenn wir die beiden Seiten der Gleichung (18) mit ω_ν multiplizieren und über ν $(\nu=1,2,\ldots,n-1)$ summieren, so bekommen wir

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\omega_\nu x_\nu=\frac{x_n}{\Omega_n}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\omega_\nu\Omega_\nu+\frac{\gamma'}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\varepsilon'_\nu\omega_\nu$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{n}\omega_\nu x_\nu=\frac{\sqrt{\Delta_1}}{\Omega_n}x_n+\frac{\gamma'}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\varepsilon'_\nu\omega_\nu. \tag{19}$$

Wenn wir dagegen die Gleichungen (18) mit $\omega_\nu^{(\mu)}$ $(\mu=2,3,\ldots,n)$ multiplizieren und über ν summieren, erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\omega_\nu^{(\mu)}x_\nu=\frac{x_n}{\Omega_n}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\omega_\nu^{(\mu)}\Omega_\nu+\frac{\gamma'}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\varepsilon'_\nu\omega_\nu^{(\mu)}$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{n}\omega_\nu^{(\mu)}x_\nu=\frac{x_n}{\Omega_n}\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\omega_\nu^{(\mu)}\Omega_\nu+\frac{\gamma'}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\varepsilon'_\nu\omega_\nu^{(\mu)}. \tag{20}$$

---

[14]) *Furtwängler:* „Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen". Math. Ann. 96 und 99 (1927, 1928).

[15]) Siehe auf S. 6 unter Anm. 6.

In (20) ist auf der rechten Seite die erste Summe nach (15) gleich Null. Aus (19) und (20) folgt daher

$$|\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n| \leqq \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega_n} \cdot x_n\right| + \frac{\gamma'(|\omega_1| + \ldots + |\omega_{n-1}|)}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$|\omega''_1 x_1 + \omega''_2 x_2 + \ldots + \omega''_n x_n| \leqq \frac{\gamma'(|\omega''_1| + \ldots + |\omega''_{n-1}|)}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|\omega_1^{(n)} x_1 + \omega_2^{(n)} x_2 + \ldots + \omega_n^{(n)} x_n| \leqq \frac{\gamma'(|\omega_1^{(n)}| + \ldots + |\omega_{n-1}^{(n)}|)}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Multipliziert man diese n-Ungleichungen miteinander, so erhält man

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\text{Rel. norm. } (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)| \\ \leqq \gamma'^{n-1} \cdot \left| \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\Omega_n} \cdot \prod\limits_{\mu=2}^{n} (|\omega_1^{(\mu)}| + \ldots + |\omega_{n-1}^{(\mu)}|) \right| + \dfrac{c}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}}, \end{array} \right.$$

wo c eine feste Konstante ist. Sollen die Ungleichungen (17) unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ haben, so muß unter diesen ein x_n dabei sein, das nach dem absoluten Betrag beliebig groß ist.

Da die Relativnorm einer ganzen Zahl aus $\mathfrak{k}_1$ eine ganze Zahl aus dem Grundkörper $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ ist, so muß die linke Seite von (21) absolut $\geqq 1$ sein. Unter Berücksichtigung des Umstands, daß $|x_n|$ beliebig groß sein darf, folgt aus (21)

$$1 \leqq \gamma'^{n-1} \cdot \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega_n} \cdot \prod_{\mu=2}^{n} (|\omega_1^{(\mu)}| + \ldots + |\omega_{n-1}^{(\mu)}|) \right|$$

oder also

$$\gamma'^{n-1} \geqq \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{|\Omega_n|}{\prod\limits_{\mu=2}^{n} (|\omega_1^{(\mu)}| + \ldots + |\omega_{n-1}^{(\mu)}|)}.$$

Der letzte Bruch ist für $n = 2$ trivialerweise gleich 1. Für $n > 2$ liegt er bei geeigneter Wahl des Grundsystems nach dem Hilfssatz beliebig nahe bei 1; also ist

$$\gamma' \geqq \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}.$$

Wenn daher

$$\gamma' < \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}$$

ist, so existieren höchstens endlich viele Lösungen für (17); w. z. b. w.

§ 5.

Die Abschätzung der minimalen Grundzahl Δ_0 nach oben für relativ quadratische Körper.

Satz 2 liefert das günstigste Resultat dann, wenn wir für $\mathfrak{k}_1$ einen Oberkörper wählen, dessen Grundzahl Δ möglichst klein ist. Im folgenden wird es uns in einigen Fällen gelingen, die minimale Grundzahl Δ wirklich anzugeben; in anderen Fällen werden wir sie wenigstens günstig nach oben abschätzen können.

Wir bezeichnen das minimale Δ mit Δ_0.

Zuerst sei $n = 2$. Wir suchen also einen relativ quadratischen Körper $\mathfrak{k}_1$ über dem Grundkörper $\mathfrak{k} = \Re(i\sqrt{D})$.

Ist ω eine den Körper $\mathfrak{k}_1$ erzeugende ganze Zahl und ω'' ihre relativ-konjugierte, so ist gewiß

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} 1 & \omega \\ 1 & \omega'' \end{vmatrix}^2 = |\omega - \omega''|^2. \tag{22}$$

Um eine möglichst günstige Abschätzung für Δ_0 zu bekommen, müssen wir den Körper $\mathfrak{k}_1$ und die Zahl ω so wählen, daß $|\omega - \omega''|$ möglichst klein wird. Nun ist

$$\omega = \frac{\alpha + \beta\sqrt{\delta}}{\gamma}, \qquad \omega'' = \frac{\alpha - \beta\sqrt{\delta}}{\gamma}, \tag{23}$$

wo α, β, γ, δ ganze Zahlen aus $\mathfrak{k} = \Re(i\sqrt{D})$ sind, aber δ keine Quadratzahl. Nach (22) ist dann

$$\Delta_0 \leqq 4 \cdot \left|\frac{\beta^2 \delta}{\gamma^2}\right|. \tag{24}$$

Wir dürfen stets annehmen, daß α, β, γ außer den Einheiten keinen gemeinsamen Zahlteiler in $\mathfrak{k} = \Re(i\sqrt{D})$ haben; wohl aber können sie, falls die Klassenzahl $h > 1$ ist, einen gemeinsamen Idealteiler haben. Ebenso dürfen wir annehmen, daß δ keinen von einer Einheit

verschiedenen quadratischen Zahlteiler hat; wohl aber kann δ durch das Quadrat eines Ideals teilbar sein.

Dafür daß ω ganzzahlig wird, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\omega + \omega'' = \frac{2\alpha}{\gamma}, \qquad \omega \cdot \omega'' = \frac{\alpha^2 - \beta^2\delta}{\gamma^2} \tag{25}$$

ganze Zahlen aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ sind.

Für $D = 1$ ist $h = 1$. Nach der obigen Verabredung sind α, β, γ teilerfremd in $\mathfrak{R}(i)$. Nach der Bedingung (25) muß γ ein Teiler von 2 sein. Denn wenn γ mit α einen gemeinsamen Primteiler hätte, so müßte, weil $\omega \cdot \omega''$ ganz und δ keine Quadratzahl enthält, γ mit β denselben Primteiler gemein haben. Das widerspricht aber der Annahme, daß α, β, γ teilerfremd sind Also haben α, β, γ zu je zwei keine Zahlteiler gemein. Hiernach muß $\gamma = 1$ oder $1 + i$ oder 2 sein.

Sei $\gamma = 1$. Dann sind schon die Bedingungen (25) von selbst erfüllt. Nach (24) ist dann $\Delta_0 \leqq 4 \mid \beta^2\delta \mid$. Die günstigste Abschätzung kommt für $\beta = 1$, $\delta = i$; also $\Delta_0 \leqq 4$.

Sei $\gamma = 1 + i$. Dann ist die erste Bedingung von (25) schon erfüllt. Damit auch die zweite erfüllt ist, muß $\alpha^2 - \beta^2\delta \equiv 0 \pmod 2$ sein. Damit die Abschätzung $\Delta \leqq 2 \mid \beta^2\delta \mid$ möglichst günstig wird, muß $\beta = \pm 1$ oder $\pm i$ sein. Offenbar genügt es, sich auf $\beta = 1$ zu beschränken. Dann wird $\delta \equiv \alpha^2 \pmod 2$. Das günstigste Resultat kommt für $\alpha = 0$, $\delta = 2$; nämlich $\Delta_0 \leqq 4$, wie vorhin.

Sei $\gamma = 2$. Die erste Bedingung von (25) ist wieder erfüllt. Damit auch die zweite erfüllt ist, muß $\alpha^2 - \beta^2\delta \equiv 0 \pmod 4$ sein. β muß zu 2 relativ prim sein, weil sonst α, β, γ einen nicht trivialen Teiler gemein hätten. Also ist $\beta \equiv 1$ oder $i \pmod 2$ oder $\beta^2 \equiv 1$ oder $-1 \pmod 4$. Das günstigste Resultat aus $\Delta_0 \leqq \mid \beta^2\delta \mid$ kommt für $\beta = \pm 1$ oder $\pm i$. Es genügt wieder $\beta = 1$ zu nehmen. Dabei ist $\delta \equiv \alpha^2 \pmod 4$, oder $\delta \equiv (x + iy)^2 \pmod 4$ (x, y ganz rationell), oder $\delta \equiv x^2 - y^2 + 2xyi \pmod 4$. Da δ keinen nicht trivialen quadratischen Teiler haben soll, muß von den Zahlen x, y die eine gerade, die andere ungerade sein. Dann ist $\delta = \pm 1 \pmod 4$. Das absolut kleinste derartige δ, das keine Quadratzahl in $\mathfrak{R}(i)$ ist, ist $\delta = -3$. Dann kann man $\alpha = 1$ wählen. Hiernach ist

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}^2 = 3,$$

also ein günstigeres Resultat als vorhin. Damit ist der zweite Teil des folgenden Satzes von *Ford*[16])-*Perron*[17]) erneut bewiesen:

Satz 3a. Ist α irgend eine komplexe Zahl, die nicht dem Körper $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i)$ angehört, so läßt sich die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{x_1}{x_2}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}\,|x_2|^2}$$

durch unendlich viele Paare ganzer Zahlen x_1, x_2 aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i)$ erfüllen. Ist dagegen $\gamma' < \frac{1}{\sqrt{3}}$, so läßt sich jede der beiden durch das Vorzeichen $\pm$ unterschiedenen Ungleichungen

$$\left|\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - \frac{x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} - \frac{x_1}{x_2}\right| < \frac{\gamma'}{|x_2|^2} \qquad \left(\Omega_1 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},\ \Omega_2 = 1\right)$$

nicht durch unendlich viele solche Paare x_1, x_2 befriedigen.

Der erste Teil dieses Satzes ist hier nur der Vollständigkeit halber angeführt und soll nicht bewiesen werden; unser Satz 1 würde nur eine weniger günstige Schranke liefern.

Wir möchten bei den nächsten Überlegungen nicht alle Rechnungen ebenso ausführlich durchführen wie vorhin.

Für $D = 2$ ist $h = 1$. Nach der Bedingung (25) muß γ ein Teiler von 2 sein. Also $\gamma = 1, 2, i\sqrt{2}$. Das günstigste Resultat kommt diesmal für $\gamma = i\sqrt{2}$ und $\omega = \frac{1+i}{i\sqrt{2}}$, also $\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''|^2 = \left|\frac{2}{\sqrt{2}}\right| = 2$. Damit ist der zweite Teil des folgenden Satzes von *Perron*[18]), in dem aus gleichem Grund wie vorhin der erste Teil zugefügt wurde, erneut bewiesen:

Satz 3b. Ist α irgend eine komplexe Zahl, die nicht dem Körper $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ angehört, so läßt sich die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{x_1}{x_2}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}\,|x_2|^2}$$

durch unendlich viele Paare ganzer Zahlen x_1, x_2 aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ erfüllen. Ist dagegen $\gamma' < \frac{1}{\sqrt{2}}$, so läßt sich jede

---

[16]) Siehe S. 6 unter Anm. 2.
[17]) Siehe S. 6 unter Anm. 3, Satz 2, S. 534.
[18]) Siehe S. 6 unter Anm. 5, Satz 1, S. 750.

der beiden durch das Vorzeichen $\pm$ unterschiedenen Ungleichungen

$$\left|\frac{\Omega_1}{\Omega_2}-\frac{x_1}{x_2}\right|=\left|\frac{1\pm i}{i\sqrt{2}}-\frac{x_1}{x_2}\right|<\frac{\gamma'}{|x_2|^2}\qquad\left(\Omega_1=\frac{1\pm i}{i\sqrt{2}},\ \Omega_2=1\right)$$

nicht durch unendlich viele solche Paare x_1, x_2 befriedigen.

Für $D=3$ ist h wieder gleich 1. Nach der Bedingung (25) muß $\gamma=1$ oder 2 (weil 2 ein Primideal in $\mathfrak{k}=\mathfrak{R}(i\sqrt{3})$ ist) sein. Das günstigste Δ_0 bekommt man für $\gamma=2$, $\omega=\frac{1+\sqrt{-1+2i\sqrt{3}}}{2}$. Es ist

$$\Delta_0\leqq|\omega-\omega''|^2=\left|\sqrt{-1+2i\sqrt{3}}\right|^2=\sqrt{13}.$$

Damit ist der zweite Teil des folgenden Satzes von *Perron*,[19]) in dem ebenfalls der erste Teil zugefügt wurde, erneut bewiesen:

Satz 3c. Ist α irgend eine komplexe Zahl, die nicht dem Körper $\mathfrak{k}=\mathfrak{R}(i\sqrt{3})$ angehört, so läßt sich die Ungleichung

$$\left|\alpha-\frac{x_1}{x_2}\right|<\frac{1}{\sqrt[4]{13}\,|x_2|^2}$$

durch unendlich viele Paare ganzer Zahlen x_1, x_2 aus $\mathfrak{k}=\mathfrak{R}(i\sqrt{3})$ erfüllen. Ist dagegen $\gamma'<\frac{1}{\sqrt[4]{13}}$, so läßt sich jede der beiden durch das Vorzeichen $\pm$ unterschiedenen Ungleichungen

$$\left|\frac{\Omega_1}{\Omega_2}-\frac{x_1}{x_2}\right|=\left|\frac{1\pm\sqrt{-1+2i\sqrt{3}}}{2}-\frac{x_1}{x_2}\right|<\frac{\gamma'}{|x_2|^2}$$

$$\left(\Omega_1=\frac{1\pm\sqrt{-1+2i\sqrt{3}}}{2},\ \Omega_2=1\right)$$

nicht durch unendlich viele solche Paare x_1, x_2 befriedigen.

Nachdem wir die drei Fälle $D=1, 2, 3$ gesondert betrachtet haben, wollen wir noch die drei Fälle für $D\equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ untersuchen.

---

[19]) Siehe S. 6 unter Anm. 4.

a) Sei $D \equiv 1 \pmod 4$ aber $D \neq 1$. Dann ist $\omega = \frac{i\sqrt{D}+i}{2}$ eine ganze Zahl eines quadratischen Oberkörpers, und man erhält

$$\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''| = 1.$$

Da Δ_0 der absolute Wert einer ganzen Zahl aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ ist, muß gewiß $\Delta_0 \geqq 1$ sein, so daß man diesmal hat: $\Delta_0 = 1$.

b) Sei $D \equiv 2 \pmod 4$ aber $D \neq 2$. Dann ist $\omega = \frac{i\sqrt{D}+i\sqrt{2}}{2}$ oder auch $\frac{i\sqrt{D}+\sqrt{2}}{2}$ eine ganze Zahl eines quadratischen Oberkörpers, und man erhält beidemal $\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''|^2 = 2$.

c) Sei nun $D \equiv 3 \pmod 4$ aber $D \neq 3$. Dann ist $\omega = \frac{i\sqrt{D}+i\sqrt{3}}{2}$ oder auch $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ eine ganze Zahl eines quadratischen Oberkörpers, und man erhält beidemal $\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''|^2 = 3$.

Es liegt auf der Hand, daß man für die letzten drei Fälle die analogen Sätze zum zweiten Teil von Satz 3 a, b, c aussprechen kann. Wir wollen diese später in einer Tabelle zum Ausdruck bringen.

Die Resultate der ersten beiden Fälle, also für $D \not\equiv 3 \pmod 4$, stimmen ganz mit den Resultaten von *Perron*[20]) überein, und bestätigen die Resultate von *Hofreiter*[21]) für $D = 5, 6$.

Für den 3. Fall, also für $D \equiv 3 \pmod 4$ stimmt das Resultat ebenfalls mit dem von *Perron*[20]) überein. Man kann aber für diesen Fall spezielle Körper angeben, die noch günstigere Resultate liefern. Bereits *Hofreiter*[21]) hat für $D = 7, 11, 15, 19, 23$ gefunden, daß $\Delta_0 \leqq \sqrt{8}, \sqrt{5}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{8}$ ist.

Im folgenden werden diese Resultate bestätigt und noch für $D = 31$ gezeigt, daß $\Delta_0 \leqq \sqrt{8}$ ist.

Zu dem Zweck betrachten wir den Fall $D \equiv 3 \pmod 4$, aber $D \neq 3$ gründlicher. Setzt man $\frac{D+1}{4} = d$, so ist d eine positive ganze Zahl > 1. Wir haben hier vier Fälle zu unterscheiden je nachdem $d \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ ist.

---

[20]) Siehe S. 6 unter Anm. 5, die Abschätzung (3), S. 750.
[21]) Siehe S. 6 unter Anm. 7, § 1, S. 178.

1. Sei $d \equiv 0 \pmod 4$. Dann ist

$$\omega = \frac{\frac{1+i\sqrt{D}}{2} + \sqrt{\frac{1+i\sqrt{D}}{2}}}{2}$$

eine ganze Zahl eines quadratischen Oberkörpers und man erhält

$$\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''|^2 = \sqrt{\frac{1+D}{4}} = \sqrt{d}.$$

Das ist günstiger als vorhin für $d = 4$ und 8, also $D = 15$ und 31, und zwar ist dann $\Delta_0 \leqq 2$ bezw. $\sqrt{8}$.

2. Sei $d \equiv 1 \pmod 4$ aber $d \neq 1$. Dann ist

$$\omega = \frac{\frac{1+i\sqrt{D}}{2} + \sqrt{\frac{-1+i\sqrt{D}}{2}}}{2}$$

eine ganze Zahl eines quadratischen Oberkörpers und man erhält

$$\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''|^2 = \sqrt{\frac{1+D}{4}} = \sqrt{d}.$$

Das ist günstiger als vorhin für $d = 5$, also $D = 19$, und zwar ist $\Delta_0 \leqq \sqrt{5}$.

3. Sei $d \equiv 2 \pmod 4$. Dann ist

$$\omega = \frac{\frac{1+i\sqrt{D}}{2} + \sqrt{\frac{5+i\sqrt{D}}{2}}}{2}$$

eine ganze Zahl eines quadratischen Oberkörpers und es ist

$$\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''|^2 = \sqrt{\frac{25+D}{4}} = \sqrt{6+d}.$$

Das ist günstiger als vorhin für $d = 2$, also $D = 7$, und zwar ist dann $\Delta_0 \leqq \sqrt{8}$. Wenn aber $d \equiv 2 \pmod 4$ $d \neq 2$ ist, dann ist auch

$$\omega = \frac{\frac{1+i\sqrt{D}}{2} + \sqrt{\frac{-3+i\sqrt{D}}{2}}}{2}$$

eine ganze Zahl eines quadratischen Oberkörpers[22]) und es ist

$$\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''|^2 = \sqrt{\frac{9+D}{4}} = \sqrt{2+d}.$$

Das ist günstiger als vorhin für $d = 6$, also $D = 23$ und zwar ist $\Delta_0 \leqq \sqrt{8}$.

4. Sei $d \equiv 3 \pmod 4$. Dann ist

$$\omega = \frac{\frac{1+i\sqrt{D}}{2} + \sqrt{\frac{3+i\sqrt{D}}{2}}}{2}$$

eine ganze Zahl eines quadratischen Oberkörpers und man erhält

$$\Delta_0 \leqq |\omega - \omega''|^2 = \sqrt{\frac{9+D}{4}} = \sqrt{2+d}.$$

Das ist günstiger als vorhin für $d = 3$, also $D = 11$, zwar ist $\Delta_0 \leqq \sqrt{5}$.

In den folgenden Tabellen sind die bis jetzt festgestellten Resultate über die in § 1 definierte Zahl γ_0 zusammengestellt.

Wenn $D \not\equiv 3 \pmod 4$ ist, gilt nach Satz 1 und 2 allgemein[23])

$$\frac{\sqrt{6D}}{\pi} \geqq \gamma_0 \geqq \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}}. \tag{26}$$

---

[22]) Für $d = 2$, also $D = 7$ trifft das nicht zu, weil $\sqrt{\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}} = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, also keinen Oberkörper liefert.

[23]) *A. Oppenheim* hat durch die Benutzung des Korkine-Zolotareffschen Satzes nur für $n = 2$ die allgemein gültige obere Schranke von γ_0 noch herabgedrückt und zwar auf $\sqrt{\frac{\mu^2 D}{2}}$, wo $\mu = 1$ für $D \not\equiv 3 \pmod 4$ und $\mu = \frac{1}{2}$ für $D \equiv 3 \pmod 4$ ist. Man darf also die linke Seite in (26) ersetzen durch $\sqrt{\frac{D}{2}}$ und in (27) durch $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{2}}$. Siehe S. 6 unter Anm. 8.

Die in der Tabelle mit * bezeichneten Resultate bedeuten die richtige Schranke für γ_0 d. h. $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0^*}}$, die in den vorher zitierten Arbeiten bewiesen wurde. In der letzten Spalte ist stets eine Zahl Ω angegeben, die sich nicht besser approximieren läßt.

D	Δ_0	Ω
1	$= 3^*$	$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
2	$= 2^*$	$\frac{1 \pm i}{i\sqrt{2}}$
$\equiv 1 \pmod 4$ aber $\not\equiv 1$	$= 1$	$\frac{i\sqrt{D} \pm i}{2}$
$\equiv 2 \pmod 4$ aber $\not\equiv 2$	$\leqq 2$	$\frac{i\sqrt{D} \pm i\sqrt{2}}{2}$

Wenn $D \equiv 3 \pmod 4$ ist, gilt nach Satz 1 und 2 allgemein[23])

$$\frac{\sqrt{6D}}{2\pi} \geqq \gamma_0 \geqq \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}} \tag{27}$$

und es kommt folgende Tabelle:

[23]) Siehe Fußnote S. 26.

D	Δ_0	Ω
3	$= \sqrt{13}^*$	$\frac{1 \pm \sqrt{-1+2i\sqrt{3}}}{2}$
7	$= \sqrt{8}^{*24)}$	$\frac{\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \pm \sqrt{\frac{5+i\sqrt{7}}{2}}}{2}$
11	$\leqq \sqrt{5}$	$\frac{\frac{1+i\sqrt{11}}{2} \pm \sqrt{\frac{3+i\sqrt{11}}{2}}}{2}$
15	$\leqq 2$	$\frac{\frac{1+i\sqrt{15}}{2} \pm \sqrt{\frac{1+i\sqrt{15}}{2}}}{2}$
19	$\leqq \sqrt{5}$	$\frac{\frac{1+i\sqrt{19}}{2} \pm \sqrt{\frac{-1+i\sqrt{19}}{2}}}{2}$
23	$\leqq \sqrt{8}$	$\frac{\frac{1+i\sqrt{23}}{2} \pm \sqrt{\frac{-3+i\sqrt{23}}{2}}}{2}$
31	$\leqq \sqrt{8}$	$\frac{\frac{1+i\sqrt{31}}{2} \pm \sqrt{\frac{1+i\sqrt{31}}{2}}}{2}$
>31	$\leqq 3$	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{i\sqrt{D}+i\sqrt{3}}{2}$

[24]) Das Gleichheitszeichen und der Stern sind von *Hofreiter* bewiesen. Siehe S. 6 und Anm. 5, § 3, S. 181.

§ 6.

Die Abschätzung der minimalen Grundzahl Δ_0 nach oben für relativ kubische Körper.

Wenn $n = 3$ ist, dann haben wir uns mit einen relativ kubischen Körper $\mathfrak{k}_1$ über den Grundkörper $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ zu beschäftigen.

Sind ω_1, ω_2, ω_3 irgend drei linear unabhängige ganze Zahlen eines solchen Körpers $\mathfrak{k}_1$ und bezeichnet man wie früher die relativ Konjugierten von ω_ν mit ω''_ν, ω'''_ν, so ist gewiß

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega''_1 & \omega''_2 & \omega''_3 \\ \omega'''_1 & \omega'''_2 & \omega'''_3 \end{vmatrix}^2.$$

Es kommt jetzt nur darauf an, den Körper $\mathfrak{k}_1$ und die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ so zu wählen, daß diese Abschätzung möglichst günstig ist. Wir werden im folgenden das minimale Δ_0 selbst in einigen Fällen bestimmen können, bei weiteren ergeben sich befriedigende Abschätzungen.

Wir wählen zunächst $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \omega$, $\omega_3 = \omega^2$, wobei ω Wurzel einer in $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ irreduziblen Gleichung der Form

$$x^3 + px + q = 0 \tag{28}$$

mit ganzzahligen p, q aus $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ sein soll. Daraus ergibt sich

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega'' & \omega''^2 \\ 1 & \omega''' & \omega'''^2 \end{vmatrix}^2 = |4p^3 + 27q^2|. \tag{29}$$

Speziell die Gleichung

$$x^3 - x + 1 = 0$$

ist in jedem imaginären quadratischen Körper irreduzibel, woraus die allgemein gültige Abschätzung $\Delta_0 \leqq 23$ folgt.

Wir wollen dieses für alle D gültige Resultat für einzelne D noch zu verbessern suchen.

1. Für $D = 1$ nehmen wir den Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i, \omega)$, wobei ω der Gleichung

$$x^3 + (1 + 2i)x + 1 = 0$$

genügt. Hier ist nach (29): $\Delta_0 \leqq \sqrt{353}$ (< 19).

2. Für $D = 2$ nehmen wir den Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{2}, \omega)$, wobei ω der Gleichung

$$x^3 + (1 + i\sqrt{2})\,x + 1 = 0$$

genügt. Hier ist nach (29): $\Delta_0 \leqq 9$.

3. Für $D = 6$ nehmen wir den Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{6}, \omega)$, wobei ω der Gleichung

$$x^3 - 6x + 6 = 0$$

genügt. Hier ist zunächst $\Delta_0 \leqq 108$. Aber ω^2 ist durch $i\sqrt{6}$ teilbar. Daher ist $\frac{\omega^2}{i\sqrt{6}}$ ganz, und es ergibt sich

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} 1 & \omega & \frac{\omega^2}{i\sqrt{6}} \\ 1 & \omega'' & \frac{\omega''^2}{i\sqrt{6}} \\ 1 & \omega''' & \frac{\omega'''^2}{i\sqrt{6}} \end{vmatrix}^2 = 18.$$

4. Für $D = 7$ nehmen wir den Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{7}, \omega)$, wobei ω der Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

genügt. Hier ist zunächst $\Delta_0 \leqq 49$. Aber ω^2 ist durch $i\sqrt{7}$ teilbar und ähnlich wie vorhin ergibt sich, daß $\Delta_0 \leqq 7$ ist.

5. Für $D = 10$ gibt der Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{10}, \omega)$, wobei ω der Gleichung

$$x^3 + 4x + i\sqrt{10} = 0$$

genügt, daß $\Delta_0 \leqq 14$ ist.

6. Für $D = 23$ nehmen wir den Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{23}, \omega)$, wobei ω der Gleichung

$$x^3 - x + 1 = 0$$

genügt.

Aus der Kongruenz

$$x^3 - x + 1 \equiv (x + 3)(x + 10)^2 \pmod{23}$$

ergibt sich im Körper $\mathfrak{R}(\omega)$ die Zerlegung

$$(23) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2^2,$$

wobei

$$\mathfrak{p}_1 = (\omega + 3, 23), \qquad \mathfrak{p}_2 = (\omega + 10, 23)$$

ist. Wir bestimmen jetzt c_1, c_2, c_3 so, daß

$$c_1 - 3c_2 + (-3)^2 c_3 \equiv 0 \pmod{23}$$
$$c_1 - 10c_2 + (-10)^2 c_3 \equiv 0 \pmod{23}$$

ist. Man findet:

$$c_1 \equiv -3, \quad c_2 \equiv 1, \quad c_3 \equiv -7 \pmod{23}.$$

Jetzt kann man leicht zeigen, daß $\frac{c_1 + c_2\omega + c_3\omega^2}{i\sqrt{23}}$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{23}, \omega)$ ist.

Es ist nämlich

$$-3 + \omega - 7\omega^2 \equiv \begin{cases} -3 + (-3) - 7(-3)^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1} \\ -3 + (-10) - 7(-10)^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_2} \end{cases}$$

also

$$-3 + \omega - 7\omega^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2}.$$

Also ist

$$(-3 + \omega - 7\omega^2)^2 \equiv 0 \pmod{23}.$$

Daher ist

$$\frac{(-3 + \omega - 7\omega^2)^2}{-23}$$

und also auch

$$\frac{-3 + \omega - 7\omega^2}{i\sqrt{23}}$$

eine ganze Zahl aus $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{23}, \omega)$. Daher ist[25])

---

[25]) Dieses Beispiel nebst Berechnungsmethode stammt von Herrn *Hasse*. Die folgenden Beispiele D = 31 und D = 59 sind nach der gleichen Methode berechnet. Darüber hinaus hat Herr *Hasse* noch folgendes festgestellt (briefliche Mitteilung an Herrn *Perron*):

„Ein kubischer Oberkörper $\mathfrak{k}_1$ über $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ mit $\Delta_0 = 1$ ist jedenfalls immer dann vorhanden, wenn D eine Primzahl ist und die Klassenanzahl von $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ durch 3 teilbar ist. Dann kann als $\mathfrak{k}_1$ jeder unverzweigte zyklische Oberkörper vom Grad 3 über $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ genommen werden. Es ist $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(\mathfrak{k}, i\sqrt{D})$, wo $\mathfrak{k}$ ein absolut-kubischer Zahlkörper mit der Diskriminante $-D$ ist. Sind ω_1, ω_2, ω_3 eine Ganzheitsbasis von $\mathfrak{k}$, so existieren ganze rationale, nicht sämtlich durch die Primzahl D teilbare c_1, c_2, c_3 derart, daß $c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3$ durch $i\sqrt{D}$ teilbar ist. Ist dabei etwa c_2 nicht durch D teilbar und dann ohne Einschränkung $c_2 = 1$, so leistet das System

$$\omega_1, \quad \frac{c_1\omega_1 + \omega_2 + c_3\omega_3}{i\sqrt{D}}, \quad \omega_3$$

das Verlangte".

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-3+\omega-7\omega^2}{i\sqrt{23}} & \omega^2 \\ 1 & \dfrac{-3+\omega''-7\omega''^2}{i\sqrt{23}} & \omega''^2 \\ 1 & \dfrac{-3+\omega'''-7\omega'''^2}{i\sqrt{23}} & \omega'''^2 \end{vmatrix}^2 = 1.$$

7. Für $D = 31$ nehmen wir den Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{31}, \omega)$, wobei ω der Gleichung

$$x^3 + x + 1 = 0$$

genügt. Es gilt die Kongruenz

$$x^3 + x + 1 \equiv (x-3)(x-14)^2 \pmod{31}$$

und hieraus ergibt sich durch eine analoge Rechnung wie vorhin, daß

$$\frac{-3-\omega+11\omega^2}{i\sqrt{31}}$$

eine ganze Zahl aus $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{31}, \omega)$ ist. Daher ist

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-3-\omega+11\omega^2}{i\sqrt{31}} & \omega^2 \\ 1 & \dfrac{-3-\omega''+11\omega''^2}{i\sqrt{31}} & \omega''^2 \\ 1 & \dfrac{-3-\omega'''+11\omega'''^2}{i\sqrt{31}} & \omega'''^2 \end{vmatrix}^2 = 1.$$

8. Für $D = 59$ nehmen wir den Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{59}, \omega)$, wobei ω der Gleichnng

$$x^3 + 2x + 1 = 0$$

genügt. Es gilt die Kongruenz

$$x^3 + 2x + 1 \equiv (x+28)(x-14)^2 \pmod{59}$$

und hieraus ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung, wie vorhin, daß

$$\frac{28-\omega+21\omega^2}{i\sqrt{59}}$$

eine ganze Zahl aus $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{59}, \omega)$ ist. Daher ist

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{28 - \omega + 21\,\omega^2}{i\sqrt{59}} & \omega^2 \\ 1 & \dfrac{28 - \omega'' + 21\,\omega''^2}{i\sqrt{59}} & \omega''^2 \\ 1 & \dfrac{28 - \omega''' + 21\,\omega'''^2}{i\sqrt{59}} & \omega'''^2 \end{vmatrix}^2 = 1.$$

9. Für $D = 182$ nehmen wir den Körper $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{R}(i\sqrt{182}, \omega)$, wobei ω der Gleichung

$$x^3 + 17\,x + 2\,i\sqrt{182} = 0$$

genügt. Hier ist nach (29) zunächst $\Delta_0 \leqq 4$. Aber man überzeugt sich leicht (z. B. durch Tschirnhaustransformation), daß die Zahl

$$\frac{\omega + (1 + i\sqrt{182})\,\omega^2}{2}$$

ganz ist. Daraus folgt[26])

$$\Delta_0 \leqq \text{abs.} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\omega + (1 + i\sqrt{182})\,\omega^2}{2} & \omega^2 \\ 1 & \dfrac{\omega'' + (1 + i\sqrt{182})\,\omega''^2}{2} & \omega''^2 \\ 1 & \dfrac{\omega''' + (1 + i\sqrt{182})\,\omega'''^2}{2} & \omega'''^2 \end{vmatrix}^2 = 1.$$

In der folgenden Tabelle sind außer den hier vorgeführten noch einige weitere Beispiele zusammengefaßt, in denen es mir gelungen ist, Δ_0 unter 23 herabzudrücken. p, q sind die jeweils in (28) auftretenden ganzzahligen Koeffizienten aus dem Grundkörper $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{D})$.

---

[26]) Dieses Beispiel stammt von Herrn *A. Scholz* (briefliche Mitteilung an Herrn *Perron*).

D	Δ_0	p	q
1	$\leqq \sqrt{353}$	$1+2i$	1
2	$\leqq 9$	$1+i\sqrt{2}$	1
6	$\leqq 18$	-6	6
7	$\leqq 7$	-7	7
10	$\leqq 14$	4	$i\sqrt{10}$
11	$\leqq \sqrt{405}$	$\frac{1+i\sqrt{11}}{2}$	1
13	$\leqq 13$	13	$5i\sqrt{13}$
15	$\leqq \sqrt{391}$	$\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$	1
19	$\leqq 4$	8	$2i\sqrt{19}$
23	$= 1$	-1	1
31	$= 1$	1	1
37	$\leqq 4$	10	$2i\sqrt{37}$
51	$= 9$	16	$3i\sqrt{51}$
59	$= 1$	2	1
182	$= 1$	17	$2i\sqrt{182}$
197	$\leqq 5$	11	$i\sqrt{197}$
326	$\leqq 14$	13	$i\sqrt{326}$
406	$\leqq 14$	14	$i\sqrt{406}$
607	$\leqq 5$	16	$i\sqrt{607}$

Lebenslauf

Am 25. März 1913 wurde ich als Sohn eines türkischen Postbeamten in Konya (Türkei) geboren. Ich bin in Ereğli (bei Konya) in die Volksschule gegangen und habe dann in Konya von 1927—1933 das Gymnasium besucht und mein Reifezeugnis bekommen.

Nach einem Wettbewerb hat mir die türkische Regierung mein Hochschulstudium in Deutschland ermöglicht. Erstmals begann ich mein Studium im W.S. 1934/35 an der Göttinger Universität. Nach zwei Semestern in Göttingen bin ich nach München gekommen, woselbst ich seit W.S. 1935/36 bis jetzt ununterbrochen studierte.

Bei meinem Studium bin ich allen meinen Lehrern, im besonderen der türkischen Regierung, die mir das Studium ermöglicht hat und vor allem für die wertvollen Anregungen dieser Arbeit Herrn Geheimrat Prof. Dr. *Perron* zu aufrichtigem Dank verpflichtet.